



OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TEMA

1



Comprueba si tu
temario está actualizado.
<https://www.academiaries.com>



OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TEMA 1

Vectores en el plano. Operaciones básicas con vectores. Producto escalar de vectores en el plano. Aplicaciones.

© 2026 Academia Aresformación. Todos los derechos reservados.

Esta obra y todo su contenido (textos, gráficos, esquemas y maqueta) están protegidos por el Real Decreto Legislativo 1/1996 (Ley de Propiedad Intelectual) y por la normativa nacional e internacional aplicable.

Se concede al alumno una **licencia de uso personal, intransferible y no exclusiva**, limitada a su estudio individual. Queda expresamente prohibido, sin autorización escrita del titular:

- Reproducir, copiar o imprimir la obra, total o parcialmente, para terceros.
- Distribuir, vender, revender, alquilar, prestar o ceder este documento por cualquier medio, gratuito u oneroso.
- Comunicarlo públicamente o ponerlo a disposición en internet, redes sociales, plataformas de intercambio o cualquier repositorio digital.
- Eliminar o alterar las marcas de agua, avisos de copyright o identificadores incorporados.

La infracción de estos derechos generará responsabilidad civil (indemnización de daños y perjuicios, arts. 138 y ss. TRLPI) y puede constituir delito castigado con pena de prisión de hasta 4 años y multa (art. 270 del Código Penal).

Este ejemplar está identificado de forma individualizada. Su difusión no autorizada permite trazar al usuario de origen.

Contacto para autorizaciones y licencias: info@academiaries.com

OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA | TEMA 1

I. Introducción	4
II. Multiplicación por un escalar	4
III. Adición de vectores	5
IV. Vectores linealmente dependientes e independientes	6
1. Combinación lineal de vectores	7
V. Producto escalar de dos vectores	9
1. Expresión analítica del producto escalar	11
VI. Aplicaciones del producto escalar	12
VII. Producto vectorial de dos vectores	13
VIII. Resumen	14



I. INTRODUCCIÓN

Dados dos puntos del espacio, A y B , se define el vector fijo $\overrightarrow{AB}$, como el segmento orientado de origen en el punto A y de extremo en B . Los vectores en el espacio se caracterizan por un módulo, una dirección y un sentido.

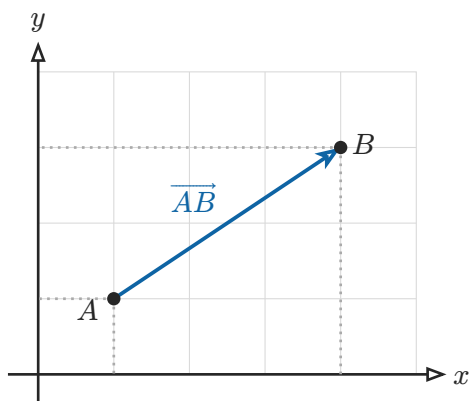


Figura 1: Vector fijo $\overrightarrow{AB}$ de origen A y extremo B .

Dos vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. El conjunto de todos los vectores equipolentes a uno dado define un **vector libre** $\vec{v}$.

II. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Un vector $\vec{v}$ puede multiplicarse por un escalar k cualquiera. El vector resultante, $k\vec{v}$, tiene un módulo que es k veces el módulo del vector v , la misma dirección que v y el mismo sentido si k es positivo y sentido contrario si k es negativo.

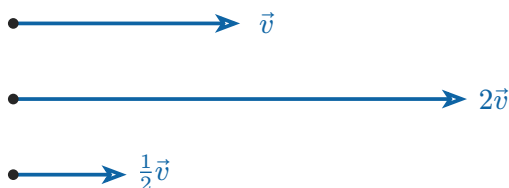


Figura 2: Para $k > 0$, $k\vec{v}$ conserva dirección y sentido; solo cambia el módulo.

RECUERDA

1. El producto $0 \cdot \vec{v}$ es igual al vector $\vec{0}$, denominado **vector nulo**.
2. El producto $(-1) \cdot \vec{v}$ es igual al vector $-\vec{v}$ y se llama **vector opuesto** de $\vec{v}$: mismo módulo y dirección que $\vec{v}$, pero sentido contrario.

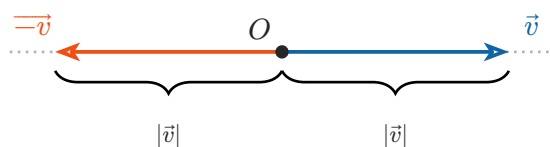


Figura 3: Vector opuesto $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$: mismo módulo ($|\vec{v}|$) y dirección, sentido contrario.

III. ADICIÓN DE VECTORES

Para sumar dos vectores libres del espacio se hace coincidir el origen del segundo con el extremo del primero. El vector suma es aquel que se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo.

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, la adición cumple las propiedades siguientes:

1. **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. **Vector nulo:** $0 + \vec{v} = \vec{v}$
4. **Vector opuesto:** $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

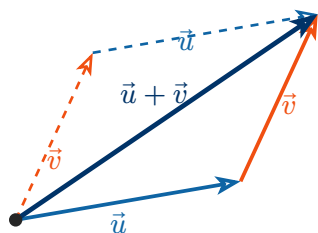


Figura 4: Suma por la regla del triángulo; el paralelogramo (punteado) muestra la conmutativa $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

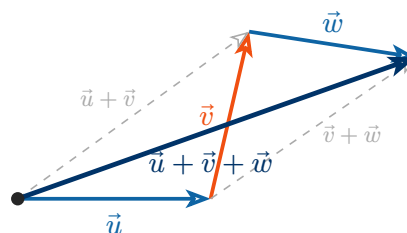


Figura 5: Asociativa: agrúpelos como agrúpelos, el resultado es la misma diagonal OC.

La regla del triángulo anterior tiene una lectura equivalente, muy habitual en física: la **regla del paralelogramo**. Se llevan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un origen común y se completa el paralelogramo que forman; la diagonal que parte de ese origen es precisamente el vector suma.

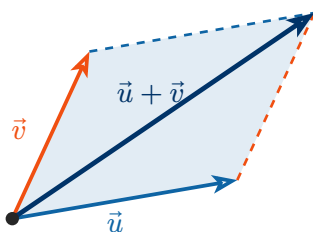


Figura 6: Regla del paralelogramo: llevando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un origen común y completando el paralelogramo, la diagonal desde O es $\vec{u} + \vec{v}$.

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del espacio y los números reales a y b , se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
2. **Distributiva respecto a la suma de vectores:** $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
3. **Distributiva respecto a la adición de números:** $(a + b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
4. **Elemento unidad:** si 1 es el elemento unidad de los números reales, entonces $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

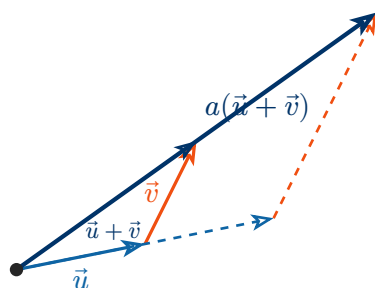


Figura 7: Distributiva sobre la suma: escalar la suma $a(\vec{u} + \vec{v})$ equivale a sumar las componentes escaladas $a\vec{u} + a\vec{v}$.

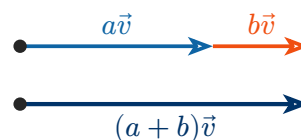


Figura 8: Distributiva sobre la adición de escalares: $a\vec{v}$ y $b\vec{v}$ encadenados dan el mismo vector que $(a + b)\vec{v}$.

El conjunto de los vectores del espacio con las propiedades y operaciones anteriores tiene estructura de espacio vectorial.

IV. VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

RECUERDA

Un vector en el espacio $\vec{w}$ es *combinación lineal* de un conjunto de vectores del espacio, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$, si es posible encontrar unos números reales $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ tales que:

$$\vec{w} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \dots + k_n\vec{u}_n$$

- Dado un conjunto de vectores, éstos son **linealmente dependientes** si uno cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.
- Dado un conjunto de vectores, si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás, se dice que dichos vectores son **linealmente independientes**.

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes si la única combinación de ellos que da el vector nulo es la *trivial*:

$$k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \dots + k_n\vec{u}_n = \vec{0}$$

Es decir:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$$

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente dependientes si, además de la trivial, existen otras combinaciones lineales no nulas de estos.



Independientes: distinta dirección

Dependientes: $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$ (misma dirección)

Figura 9: Dos vectores son independientes si no son paralelos; si uno es múltiplo del otro (misma recta), son linealmente dependientes.

1. COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Si un conjunto de vectores del espacio es tal que cualquier vector del espacio puede expresarse como combinación lineal de ellos, se dice que este conjunto es un **sistema de generadores**.

Si un sistema de generadores es tal que todos los vectores que lo forman son linealmente independientes entre sí, se dice que el sistema de generadores constituye una **base**.

Una base del espacio es un conjunto de vectores linealmente independientes entre sí y tales que cualquier vector del espacio puede expresarse como combinación lineal de ellos.

Si los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ constituyen una base, B_1 , entonces el vector $\vec{w}$ se puede representar en función de esta base. Por ejemplo:

$$\vec{w} = -2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3$$

Pero, del mismo modo, se podía haber representado $\vec{w}$ en función de otra base, B_2 , distinta a la anterior, formada por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$:

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

Diríamos entonces que las componentes del vector $\vec{w}$ son:

1. $(-2, 1, -1)$ en la base $B_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$; y son
2. $(1, 1, 1)$ en la base $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Así pues, las componentes de un vector en una base determinada son los coeficientes de la combinación lineal que permiten expresarlo en función de los elementos de esa base.

En el espacio existen infinitas bases, de tal manera que un vector $\vec{w}$ puede expresarse en función de cualquiera de ellas. Sin embargo, en el espacio se suele trabajar con la **base canónica**, formada por los vectores unitarios mutuamente perpendiculares entre sí:

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \quad \vec{j} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

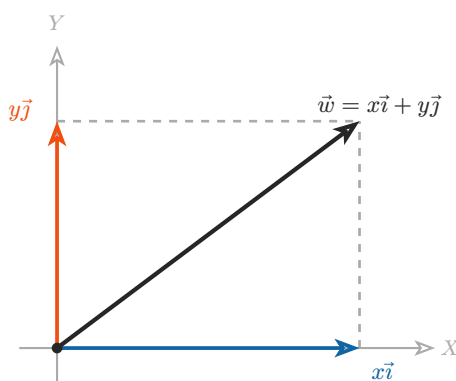


Figura 10: Descomposición de un vector $\vec{w}$ en sus componentes según la base canónica $(\vec{i}, \vec{j})$.

Con un conjunto de vectores puede construirse una matriz. En el caso de un sistema de ecuaciones, el rango nos indica el número de ecuaciones linealmente independientes. En el caso de un conjunto de vectores, el rango de la matriz nos da el número de vectores linealmente independientes.

Por ejemplo, los vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, -1), \quad \vec{u}_2 = (-2, -1, 0), \quad \vec{u}_3 = (-3, 0, 1)$$

¿son linealmente independientes? Para averiguarlo, vamos a construir la matriz A y hallar su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es no nulo, como se puede apreciar:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes. Si este determinante hubiera sido igual a cero, querría decir que hay un vector que es combinación lineal de los otros dos; en consecuencia, existiría una dependencia lineal entre estos vectores.

Recurso: Calculadora Matricial online.

Si se define en el espacio el sistema cartesiano de coordenadas formado por un punto origen O y la base canónica, cualquier punto P quedará determinado por sus tres coordenadas cartesianas. Así, un vector de origen $P(x, y, z)$ y extremo $Q(x', y', z')$ sería el siguiente:

$$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y, z' - z)$$

Por ejemplo, dado el vector de origen $P(3, 2, -1)$ y extremo $Q(2, 4, 6)$, sus coordenadas serían:

$$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y, z' - z) = (2 - 3, 4 - 2, 6 - (-1)) = (-1, 2, 7)$$

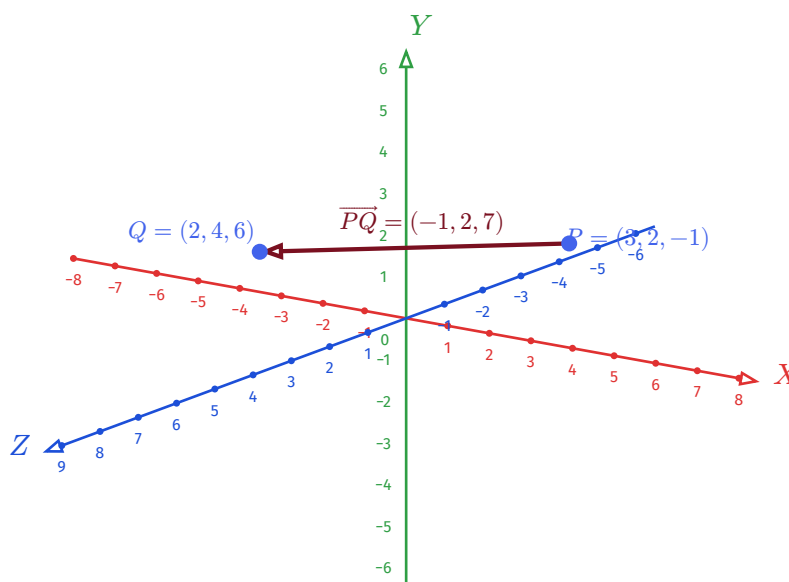


Figura 11: Vector $\overrightarrow{PQ}$ en el sistema cartesiano tridimensional, con origen $P(3, 2, -1)$ y extremo $Q(2, 4, 6)$.

Simulación de GeoGebra aquí.

V. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados dos vectores libres del espacio, se define su **producto escalar** como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Donde α representa el *menor* de los ángulos que forman estos dos vectores. (Recuérdese que, al hacer coincidir el origen de dos vectores libres del espacio, forman los ángulos α y $(2\pi - \alpha)$.)

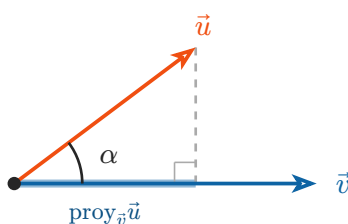


Figura 12: Producto escalar: $|\vec{v}|$ por la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$; α es el menor ángulo entre ambos.

Si las coordenadas de estos vectores son $\vec{u} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (x', y', z')$, el producto escalar se puede calcular también de la siguiente manera:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$$

- El producto escalar de dos vectores siempre es un escalar.
- El producto escalar de un vector por sí mismo es un número positivo o nulo, siempre.
- Si el ángulo que forman los vectores es de 90° , entonces el producto escalar es nulo. Dos vectores perpendiculares tienen nulo su producto escalar.

Combinando las expresiones anteriores se puede poner:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

Ejemplo: dados $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$, se tiene $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$, $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, luego

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

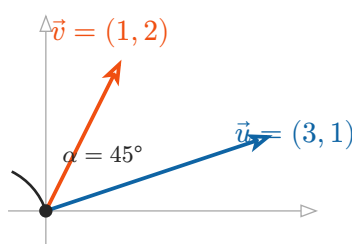


Figura 13: Ángulo entre $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$, calculado a partir de sus coordenadas: $\alpha = 45^\circ$.

El producto escalar de dos vectores tiene las siguientes propiedades:

1. El producto escalar de un vector por sí mismo es un número positivo o nulo:

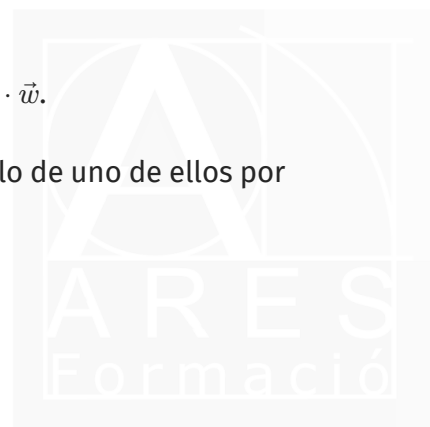
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$$

siendo $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0$.

2. Propiedad conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. Propiedad asociativa mixta: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$.
4. Propiedad distributiva respecto de la adición: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

También se puede definir el producto escalar como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{v}| \cdot \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$$



RECUERDA

El **coseno del ángulo** entre dos vectores se obtiene despejando de la expresión analítica del producto escalar:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

En particular, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (siempre que ambos vectores sean no nulos).

1. EXPRESIÓN ANALÍTICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base cualquiera del espacio, y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, los cuales se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$$

El producto escalar de ambos vectores será:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \\ &= xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + xy'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + xz'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + \dots + zz'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \\ &= xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + zz'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3)\end{aligned}$$

Usando la notación matricial se puede reescribir esta expresión de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

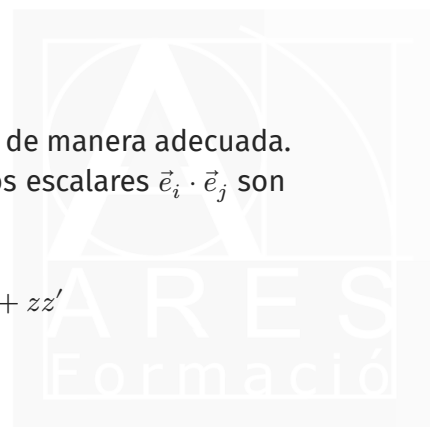
Hay que hacer notar que la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

es simétrica, ya que el producto escalar es conmutativo.

La expresión anterior se puede simplificar si se escoge la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de manera adecuada. Así, si los vectores de la base son perpendiculares entre sí, los productos escalares $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ son nulos cuando $i \neq j$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + zz'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) = xx' + yy' + zz'$$



Una base cuyos vectores son perpendiculares y de módulo igual a 1 recibe el nombre de *base ortonormal*¹. Un ejemplo de ello es la **base canónica**, formada por los vectores:

- $\vec{i} = (1, 0, 0)$
- $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Con lo que la expresión del producto escalar quedaría:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \cdot \vec{i} & \vec{i} \cdot \vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{i} & \vec{j} \cdot \vec{j} & \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & \vec{k} \cdot \vec{j} & \vec{k} \cdot \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'\end{aligned}$$

Expresión que recibe el nombre de **expresión analítica del producto escalar**. Solamente es válida esta expresión si los vectores están expresados en una base ortonormal.

VI. APLICACIONES DEL PRODUCTO ESCALAR

Una de las aplicaciones físicas más importantes del producto escalar es el cálculo del **trabajo** realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo mientras este se desplaza según un vector $\vec{d}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha$$

Solo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento realiza trabajo: si $\vec{F}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares ($\alpha = 90^\circ$), el trabajo es nulo, aunque la fuerza tenga módulo grande.

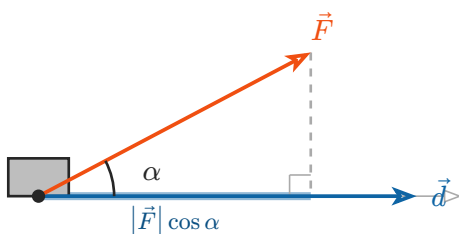


Figura 14: Trabajo de una fuerza: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$; solo la componente de $\vec{F}$ en la dirección de $\vec{d}$ contribuye al trabajo.

¹Una base es *ortonormal* si sus vectores son ortogonales dos a dos y de módulo unidad.

VII. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que tiene las siguientes propiedades:

1. Su módulo es: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$
2. Su dirección es perpendicular al plano formado por dichos vectores.
3. Su sentido es el de avance de un sacacorchos que gira del primer vector al segundo por el camino más corto.

$$4. \quad \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de **expresión analítica** del producto vectorial.

5. Si $\vec{u} = \vec{0}$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
6. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (es decir, son linealmente dependientes), entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
7. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
8. $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
9. $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Estas tres últimas igualdades se deducen directamente recordando que los tres vectores de la base son perpendiculares y $\sin 90^\circ = 1$, y además son vectores unitarios. Por otro lado, es fácil obtenerlas a partir de la expresión analítica del producto vectorial.

RECUERDA

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es **otro vector**, no un escalar:

- Su **módulo** coincide con el área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes (paralelos), siempre que ambos sean no nulos.
- **No** es conmutativo ($\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$) ni asociativo.

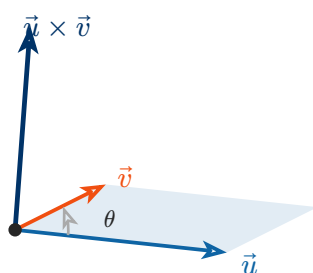


Figura 15: $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; su módulo es $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$ y su sentido, el de avance del sacacorchos al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. Propiedad asociativa respecto de la multiplicación por un escalar: $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$.
3. Propiedad distributiva respecto de la adición: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
4. El producto vectorial **no** cumple la propiedad asociativa: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

VIII. RESUMEN

Aunque ambos productos parten de los mismos dos vectores, el resultado que producen es de naturaleza completamente distinta: el producto escalar da lugar a un **número**, mientras que el producto vectorial da lugar a **otro vector**.

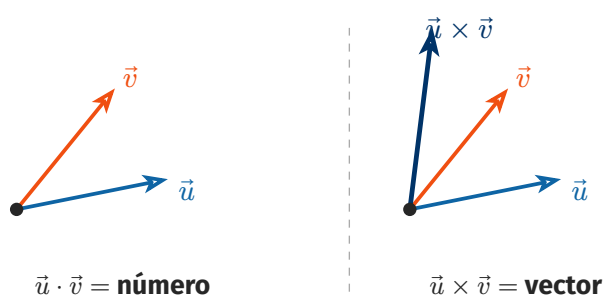


Figura 16: Comparación: el producto escalar (izquierda) produce un número, mientras que el producto vectorial (derecha) produce un vector perpendicular al plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.





Bibliografía recomendada

- George B. Thomas, Jr. (2010). **Cálculo. Varias variables** (12.ª ed., Vol. 2). Pearson Educación.

© 2026 Academia Aresformación. Todos los derechos reservados.

Esta obra y todo su contenido (textos, gráficos, esquemas y maquetación) están protegidos por el Real Decreto Legislativo 1/1996 (Ley de Propiedad Intelectual) y por la normativa nacional e internacional aplicable.

Se concede al alumno una **licencia de uso personal, intransferible y no exclusiva**, limitada a su estudio individual. Queda expresamente prohibido, sin autorización escrita del titular:

- Reproducir, copiar o imprimir la obra, total o parcialmente, para terceros.
- Distribuir, vender, revender, alquilar, prestar o ceder este documento por cualquier medio, gratuito u oneroso.
- Comunicarlo públicamente o ponerlo a disposición en internet, redes sociales, plataformas de intercambio o cualquier repositorio digital.
- Eliminar o alterar las marcas de agua, avisos de copyright o identificadores incorporados.

La infracción de estos derechos generará responsabilidad civil (indemnización de daños y perjuicios, arts. 138 y ss. TRLPI) y puede constituir delito castigado con pena de prisión de hasta 4 años y multa (art. 270 del Código Penal).

Este ejemplar está identificado de forma individualizada. Su difusión no autorizada permite trazar al usuario de origen.

Contacto para autorizaciones y licencias: info@academiares.com