



OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TEMA

1



Comprueba si tu
temario está actualizado.
<https://www.academiaries.com>



OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA

TEMA 1

Vectores en el plano. Operaciones básicas con vectores. Producto escalar de vectores en el plano. Aplicaciones.



© 2026 Academia Aresformación. Todos los derechos reservados.

Esta obra y todo su contenido (textos, gráficos, esquemas y maqueta) están protegidos por el Real Decreto Legislativo 1/1996 (Ley de Propiedad Intelectual) y por la normativa nacional e internacional aplicable.

Se concede al alumno una **licencia de uso personal, intransferible y no exclusiva**, limitada a su estudio individual. Queda expresamente prohibido, sin autorización escrita del titular:

- Reproducir, copiar o imprimir la obra, total o parcialmente, para terceros.
- Distribuir, vender, revender, alquilar, prestar o ceder este documento por cualquier medio, gratuito u oneroso.
- Comunicarlo públicamente o ponerlo a disposición en internet, redes sociales, plataformas de intercambio o cualquier repositorio digital.
- Eliminar o alterar las marcas de agua, avisos de copyright o identificadores incorporados.

La infracción de estos derechos generará responsabilidad civil (indemnización de daños y perjuicios, arts. 138 y ss. TRLPI) y puede constituir delito castigado con pena de prisión de hasta 4 años y multa (art. 270 del Código Penal).

Este ejemplar está identificado de forma individualizada. Su difusión no autorizada permite trazar al usuario de origen.

Contacto para autorizaciones y licencias: info@academiaries.com

OBSERVADOR METEOROLÓGICO DEL ESTADO

MATEMÁTICAS Y FÍSICA | TEMA 1

I. Introducción	4
II. Multiplicación por un escalar	4
III. Adición de vectores	5
IV. Vectores linealmente dependientes e independientes	6
1. Combinación lineal de vectores	7
2. Vector definido por dos puntos	9
V. Operaciones con coordenadas	11
1. Suma, resta y producto por un escalar	11
2. Módulo y vector unitario	12
3. Dirección: ángulo con el eje X	13
4. Paralelismo y perpendicularidad	14
VI. Producto escalar de dos vectores	15
1. Ampliación: expresión analítica en una base cualquiera	17
VII. Aplicaciones	18
1. Trabajo de una fuerza	19
2. Proyección de un vector sobre otro	19
3. Distancia entre dos puntos y punto medio	20
4. Composición de velocidades: avión con viento cruzado	20
5. Ejercicios resueltos	21
VIII. Ampliación: producto vectorial de dos vectores	23
IX. Resumen	25
X. Autoevaluación	26
1. Soluciones	27



I. INTRODUCCIÓN

Dados dos puntos del plano, A y B , se define el vector fijo $\overrightarrow{AB}$, como el segmento orientado de origen en el punto A y de extremo el B . Los vectores en el plano se caracterizan por un módulo, una dirección y un sentido.

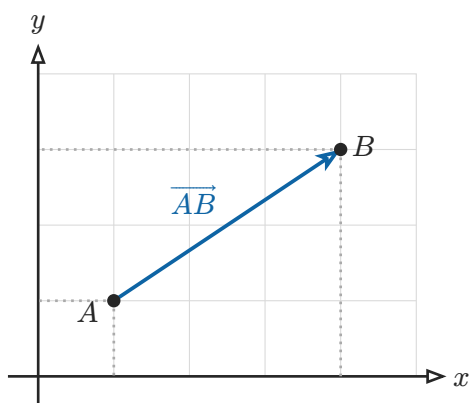


Figura 1: Vector fijo $\overrightarrow{AB}$ de origen A y extremo B .

Dos vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. El conjunto de todos los vectores equipolentes a uno dado define un **vector libre** $\vec{v}$.

II. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Un vector $\vec{v}$ puede multiplicarse por un escalar k cualquiera. El vector resultante, $k\vec{v}$, tiene un módulo que es $|k|$ veces el módulo del vector $\vec{v}$, la misma dirección que $\vec{v}$ y el mismo sentido si k es positivo y sentido contrario si k es negativo.

Ejemplo: si $|\vec{v}| = 3$, el vector $-2\vec{v}$ tiene módulo $|-2| \cdot 3 = 6$, la misma dirección que $\vec{v}$ y sentido contrario; el vector $\frac{1}{3}\vec{v}$ tiene módulo 1, es decir, es un vector unitario. Más adelante se verán ejemplos con coordenadas.

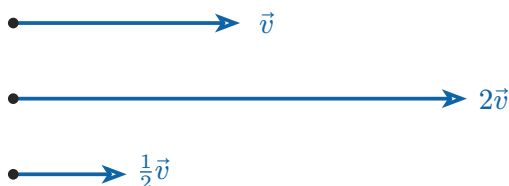


Figura 2: Para $k > 0$, $k\vec{v}$ conserva dirección y sentido; solo cambia el módulo.

RECUERDA

1. El producto $0 \cdot \vec{v}$ es igual al vector $\vec{0}$, denominado **vector nulo**.
2. El producto $(-1) \cdot \vec{v}$ es igual al vector $-\vec{v}$ y se llama **vector opuesto** de $\vec{v}$: mismo módulo y dirección que $\vec{v}$, pero sentido contrario.

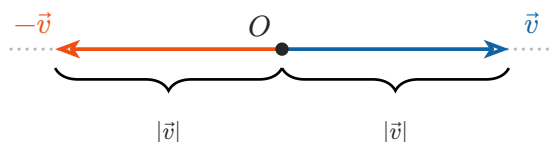


Figura 3: Vector opuesto $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$: mismo módulo ($|\vec{v}|$) y dirección, sentido contrario.

III. ADICIÓN DE VECTORES

Para sumar dos vectores libres del plano se hace coincidir el origen del segundo con el extremo del primero. El vector suma es aquel que se obtiene uniendo el origen del primero con el extremo del segundo.

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, la adición cumple las propiedades siguientes:

1. **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. **Vector nulo:** $0 + \vec{v} = \vec{v}$
4. **Vector opuesto:** $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

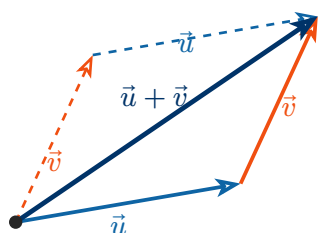


Figura 4: Suma por la regla del triángulo; el paralelogramo (punteado) muestra la conmutativa $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

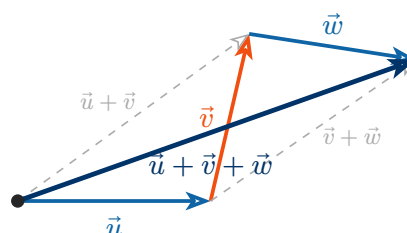


Figura 5: Asociativa: agrúpelos como agrúpelos, el resultado es la misma diagonal OC.

La regla del triángulo anterior tiene una lectura equivalente, muy habitual en física: la **regla del paralelogramo**. Se llevan $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un origen común y se completa el paralelogramo que forman; la diagonal que parte de ese origen es precisamente el vector suma.



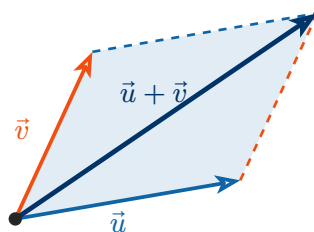


Figura 6: Regla del paralelogramo: llevando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ a un origen común y completando el paralelogramo, la diagonal desde O es $\vec{u} + \vec{v}$.

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano y los números reales a y b , se cumplen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
2. **Distributiva respecto a la suma de vectores:** $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
3. **Distributiva respecto a la adición de números:** $(a + b) \cdot \vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$
4. **Elemento unidad:** si 1 es el elemento unidad de los números reales, entonces $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

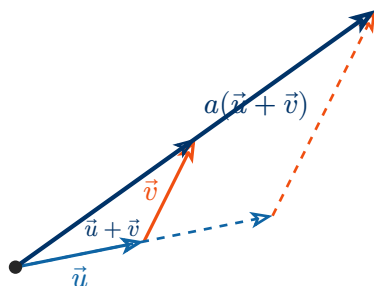


Figura 7: Distributiva sobre la suma: escalar la suma $a(\vec{u} + \vec{v})$ equivale a sumar las componentes escaladas $a\vec{u} + a\vec{v}$.

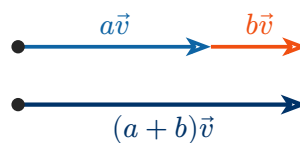


Figura 8: Distributiva sobre la adición de escalares: $a\vec{v}$ y $b\vec{v}$ encadenados dan el mismo vector que $(a + b)\vec{v}$.

El conjunto de los vectores del plano con las propiedades y operaciones anteriores tiene estructura de **espacio vectorial**.

IV. VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES

RECUERDA

Un vector del plano $\vec{w}$ es *combinación lineal* de un conjunto de vectores del plano, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$, si es posible encontrar unos números reales $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ tales que:

$$\vec{w} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \dots + k_n\vec{u}_n$$

- Dado un conjunto de vectores, estos son **linealmente dependientes** si uno cualquiera de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás.

- Dado un conjunto de vectores, si ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los demás, se dice que dichos vectores son **linealmente independientes**.

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente independientes si la única combinación de ellos que da el vector nulo es la *trivial*:

$$k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2 + k_3 \vec{u}_3 + \dots + k_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

Es decir:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = 0$$

Los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ son linealmente dependientes si, además de la trivial, existen otras combinaciones lineales no nulas de estos.



Independientes: distinta dirección

Dependientes: $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$ (misma dirección)

Figura 9: Dos vectores son independientes si no son paralelos; si uno es múltiplo del otro (misma recta), son linealmente dependientes.

1. COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Si un conjunto de vectores del plano es tal que cualquier vector del plano puede expresarse como combinación lineal de ellos, se dice que este conjunto es un **sistema de generadores**.

Si un sistema de generadores es tal que todos los vectores que lo forman son linealmente independientes entre sí, se dice que el sistema de generadores constituye una **base**.

Una base del plano es un conjunto de vectores linealmente independientes entre sí y tales que cualquier vector del plano puede expresarse como combinación lineal de ellos. **En el plano, dos vectores cualesquiera no paralelos forman una base.**

Si los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ constituyen una base, B_1 , entonces el vector $\vec{w}$ se puede representar en función de esta base. Por ejemplo:

$$\vec{w} = -2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Pero, del mismo modo, se podía haber representado $\vec{w}$ en función de otra base, B_2 , distinta a la anterior, formada por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$:

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

Diríamos entonces que las componentes del vector $\vec{w}$ son:

1. $(-2, 1)$ en la base $B_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$; y son
2. $(1, 1)$ en la base $B_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Así pues, las componentes de un vector en una base determinada son los coeficientes de la combinación lineal que permiten expresarlo en función de los elementos de esa base.

En el plano existen infinitas bases, de tal manera que un vector $\vec{w}$ puede expresarse en función de cualquiera de ellas. Sin embargo, se suele trabajar con la **base canónica**, formada por dos vectores unitarios perpendiculares entre sí, dirigidos según los ejes X e Y :

$$\vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1)$$

Así, el vector de componentes (x, y) es $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (En el espacio se añade un tercer vector, $\vec{k} = (0, 0, 1)$; véase la ampliación más adelante.)

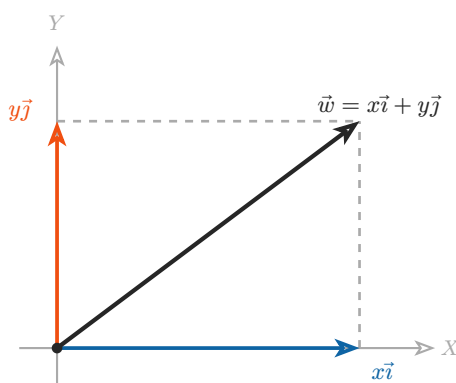


Figura 10: Descomposición de un vector $\vec{w}$ en sus componentes según la base canónica $(\vec{i}, \vec{j})$.

Con un conjunto de vectores puede construirse una matriz. En el caso de un sistema de ecuaciones, el rango nos indica el número de ecuaciones linealmente independientes. En el caso de un conjunto de vectores, el rango de la matriz nos da el número de vectores linealmente independientes.

En el plano basta un determinante de orden 2: dos vectores $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ son linealmente independientes si

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' \neq 0$$

y linealmente dependientes (paralelos) si ese determinante vale cero. Por ejemplo:

- $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$: $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 \neq 0$, luego son independientes y forman una base del plano.

• $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (4, 2)$: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$, luego son dependientes: $\vec{v} = 2\vec{u}$.

2. VECTOR DEFINIDO POR DOS PUNTOS

Si se define en el plano el sistema cartesiano de coordenadas formado por un punto origen O y la base canónica, cualquier punto P queda determinado por sus dos coordenadas cartesianas. Así, el vector de origen $P(x, y)$ y extremo $Q(x', y')$ es:

$$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y)$$

Las componentes de un vector se obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen. Por ejemplo, dado el vector de origen $P(3, 2)$ y extremo $Q(2, 4)$:

$$\overrightarrow{PQ} = (2 - 3, 4 - 2) = (-1, 2)$$

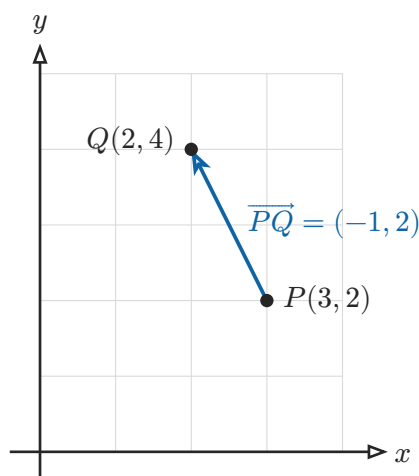


Figura 11: Vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 2)$ de origen $P(3, 2)$ y extremo $Q(2, 4)$.

a) Ampliación: vectores en el espacio

Ampliación: este apartado va más allá del programa oficial, que se limita a los vectores en el plano. Su estudio es opcional.

Todo lo anterior se extiende al espacio añadiendo una tercera coordenada. Por ejemplo, en el espacio, los vectores

$$\vec{u}_1 = (0, 0, -1), \quad \vec{u}_2 = (-2, -1, 0), \quad \vec{u}_3 = (-3, 0, 1)$$

¿son linealmente independientes? Para averiguarlo, vamos a construir la matriz A y hallar su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



El determinante de esta matriz es no nulo, como se puede apreciar:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo tanto, los tres vectores son linealmente independientes. Si este determinante hubiera sido igual a cero, querría decir que hay un vector que es combinación lineal de los otros dos; en consecuencia, existiría una dependencia lineal entre estos vectores.

Recurso: [Calculadora Matricial online](#).

Si se define en el espacio el sistema cartesiano de coordenadas formado por un punto origen O y la base canónica, cualquier punto P quedará determinado por sus tres coordenadas cartesianas. Así, un vector de origen $P(x, y, z)$ y extremo $Q(x', y', z')$ sería el siguiente:

$$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y, z' - z)$$

Por ejemplo, dado el vector de origen $P(3, 2, -1)$ y extremo $Q(2, 4, 6)$, sus coordenadas serían:

$$\overrightarrow{PQ} = (x' - x, y' - y, z' - z) = (2 - 3, 4 - 2, 6 - (-1)) = (-1, 2, 7)$$

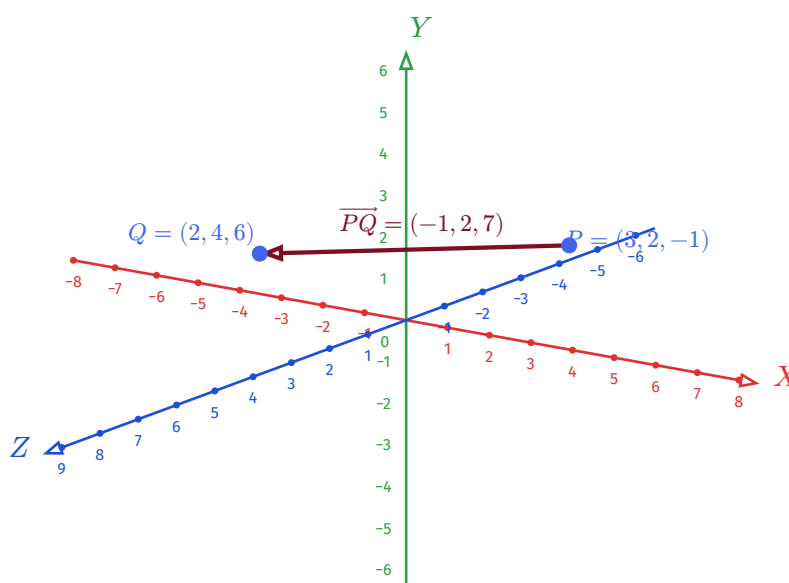


Figura 12: Vector $\overrightarrow{PQ}$ en el sistema cartesiano tridimensional, con origen $P(3, 2, -1)$ y extremo $Q(2, 4, 6)$.

Simulación de GeoGebra [aquí](#).



V. OPERACIONES CON COORDENADAS

Al expresar los vectores en la base canónica, $\vec{v} = (x, y)$, las operaciones geométricas anteriores se convierten en sencillas operaciones con números. Es la forma más práctica de trabajar en los ejercicios.

1. SUMA, RESTA Y PRODUCTO POR UN ESCALAR

Dados $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ y un número real k :

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x', y - y')$$

$$k\vec{u} = (kx, ky)$$

La **resta** es la suma con el opuesto: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Gráficamente, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ parten del mismo origen, $\vec{u} - \vec{v}$ es el vector que va del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$.

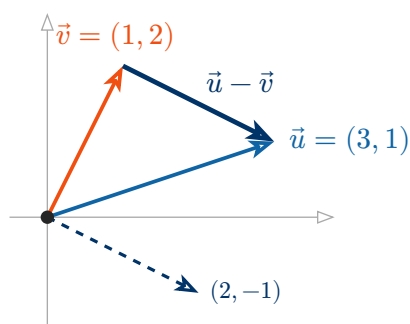


Figura 13: Resta $\vec{u} - \vec{v}$: con origen común, va del extremo de $\vec{v}$ al extremo de $\vec{u}$. Llevado al origen (punteado) tiene componentes $(2, -1)$.

Ejemplo 1: con $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$:

- $\vec{u} + \vec{v} = (3 + 1, 1 + 2) = (4, 3)$
- $\vec{u} - \vec{v} = (3 - 1, 1 - 2) = (2, -1)$
- $2\vec{u} = (6, 2)$
- $3\vec{u} - 2\vec{v} = (9 - 2, 3 - 4) = (7, -1)$

Ejemplo 2: con $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-3, 4)$ y $\vec{c} = (0, 5)$:

- Suma de tres vectores: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2 - 3 + 0, -1 + 4 + 5) = (-1, 8)$
- Resta: $\vec{a} - \vec{b} = (2 - (-3), -1 - 4) = (5, -5)$
- Producto por un escalar negativo: $-3\vec{b} = (9, -12)$
- Producto por una fracción: $\frac{1}{5}\vec{c} = (0, 1)$



- Combinación: $2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c} = (4 + 3 + 0, -2 - 4 + 1) = (7, -5)$

Ejemplo 3 (ecuación vectorial): halla $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$, con los vectores del ejemplo anterior. Se despeja como en una ecuación numérica:

$$2\vec{x} = \vec{b} - \vec{a} = (-5, 5) \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}(-5, 5) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Comprobación: $2\vec{x} + \vec{a} = (-5, 5) + (2, -1) = (-3, 4) = \vec{b}$.

Ejemplo 4 (meteorología): un viento $\vec{w} = (6, 8)$ m/s, de módulo 10 m/s, que duplica su intensidad sin cambiar de dirección pasa a ser $2\vec{w} = (12, 16)$ m/s, de módulo 20 m/s. Si el viento rola hasta soplar justo en sentido contrario con la misma intensidad, sería $-\vec{w} = (-6, -8)$ m/s.

2. MÓDULO Y VECTOR UNITARIO

Por el teorema de Pitágoras, el módulo de $\vec{v} = (x, y)$ es:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Un **vector unitario** es el que tiene módulo 1. Para obtener un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{v}$ (*normalizar* el vector) se divide entre su módulo:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{x}{|\vec{v}|}, \frac{y}{|\vec{v}|} \right)$$

RECUERDA

Para calcular el vector unitario de $\vec{v} = (x, y)$:

- Se calcula el módulo: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Se divide cada componente entre el módulo.
- Se comprueba que el resultado tiene módulo 1.

Ejemplo 1: si $\vec{v} = (3, 4)$, entonces $|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16} = 5$ y el vector unitario es $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (0.6, 0.8)$.
Comprobación: $\sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = \sqrt{0.36 + 0.64} = 1$.



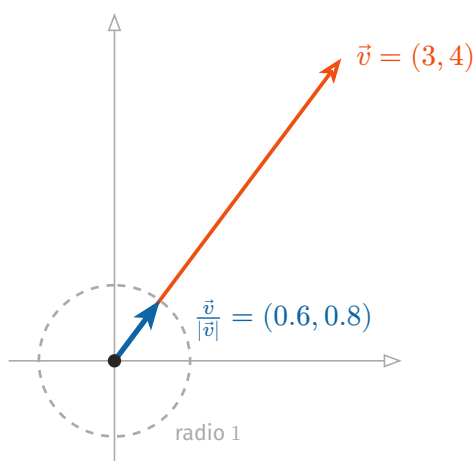


Figura 14: El vector unitario de $\vec{v}$ tiene su misma dirección y sentido, pero módulo 1: su extremo está sobre la circunferencia de radio 1.

Ejemplo 2: si $\vec{v} = (1, -2)$, entonces $|\vec{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ y el vector unitario es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) \approx (0.447, -0.894)$$

Comprobación: $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$.

Otros casos que aparecen con frecuencia en los ejercicios:

- **Unitario de sentido contrario:** $-\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Para $\vec{v} = (3, 4)$ es $(-0.6, -0.8)$.
- **Vector de módulo dado m** con la dirección y el sentido de $\vec{v}$: se multiplica el unitario por m , $m \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Un vector de módulo 10 con la dirección y el sentido de $(3, 4)$ es $10 \cdot (0.6, 0.8) = (6, 8)$.
- **Unitario a partir de un ángulo:** el vector unitario que forma un ángulo θ con el eje X es $(\cos \theta, \sin \theta)$. Para $\theta = 60^\circ$: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.
- **Unitario en la dirección de dos puntos:** para $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ y su unitario es $(0.6, 0.8)$.
- **Unitarios perpendiculares a $\vec{v} = (x, y)$:** $\pm \frac{-y, x}{|\vec{v}|}$. Para $(3, 4)$ son $(-0.8, 0.6)$ y $(0.8, -0.6)$.
- **¿Es unitario?** Basta calcular su módulo. Por ejemplo, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ **no** es unitario, ya que $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$.

3. DIRECCIÓN: ÁNGULO CON EL EJE X

La dirección y el sentido de $\vec{v} = (x, y)$ quedan fijados por el ángulo θ que forma con el semieje X positivo, medido en sentido antihorario:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



Hay que tener cuidado con el cuadrante: la calculadora devuelve $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ entre -90° y 90° , así que conviene fijarse en los signos de x e y . Por ejemplo, para $(-1, 1)$ se obtiene $\arctan(-1) = -45^\circ$, pero el vector está en el segundo cuadrante y $\theta = 135^\circ$.

Recíprocamente, si se conocen el módulo y el ángulo, las componentes son:

$$\vec{v} = (|\vec{v}| \cos \theta, |\vec{v}| \sin \theta)$$

Ejemplo: un vector de módulo 10 que forma 30° con el eje X tiene componentes $(10 \cos 30^\circ, 10 \sin 30^\circ) \approx (8.66, 5)$.

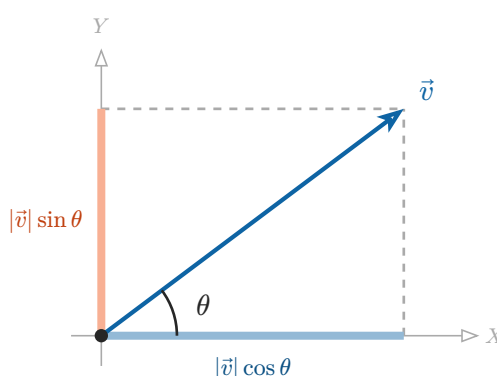


Figura 15: Componentes de un vector a partir de su módulo y del ángulo θ que forma con el eje X .

Aplicación en meteorología. El viento se trata como un vector y se descompone en una componente zonal u (positiva hacia el este) y una componente meridional v (positiva hacia el norte). En meteorología, la dirección δ indica *de dónde* sopla el viento, medida desde el norte en sentido horario; por eso, para un viento de velocidad V :

$$u = -V \sin \delta, \quad v = -V \cos \delta$$

Por ejemplo, un viento del oeste ($\delta = 270^\circ$) de 20 kt tiene $u = 20$ kt y $v = 0$: sopla hacia el este.

4. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dados $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$ no nulos:

- Son **paralelos** si sus componentes son proporcionales, $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$, o, sin divisiones, $xy' - yx' = 0$. Equivale a que uno sea múltiplo del otro: $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Son **perpendiculares** si su producto escalar es nulo (se estudia en la sección siguiente): $xx' + yy' = 0$. El vector $(-y, x)$ es siempre perpendicular a (x, y) : se intercambian las componentes y se cambia el signo de una de ellas.

Ejemplo: $\vec{u} = (2, -3)$ es paralelo a $(-4, 6) = -2\vec{u}$, ya que $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6}$, y es perpendicular a $(3, 2)$, ya que $2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0$.

RECUERDA

Con $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$:

- $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x', y \pm y')$ y $k\vec{u} = (kx, ky)$.
- Módulo: $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vector unitario: $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$.
- Dirección: $\tan \theta = \frac{y}{x}$ y $\vec{u} = (|\vec{u}| \cos \theta, |\vec{u}| \sin \theta)$.
- Paralelos: $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. Perpendiculares: $xx' + yy' = 0$.

VI. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados dos vectores libres del plano, se define su **producto escalar** como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Donde α representa el *menor* de los ángulos que forman estos dos vectores. (Recuérdese que, al hacer coincidir el origen de dos vectores libres del plano, forman los ángulos α y $(2\pi - \alpha)$.)

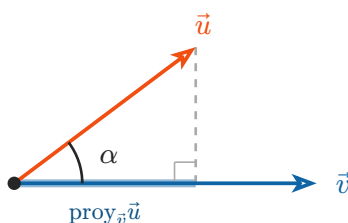


Figura 16: Producto escalar: $|\vec{v}|$ por la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$; α es el menor ángulo entre ambos.

Si las coordenadas de estos vectores en la base canónica son $\vec{u} = (x, y)$ y $\vec{v} = (x', y')$, el producto escalar se puede calcular también de la siguiente manera:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

(En el espacio se añadiría el término $z \cdot z'$.)

- El producto escalar de dos vectores siempre es un escalar.
- El producto escalar de un vector por sí mismo es un número positivo o nulo, siempre.
- Si el ángulo que forman los vectores es de 90° , entonces el producto escalar es nulo. **Dos vectores perpendiculares tienen nulo su producto escalar.**

Signo del producto escalar. Como los módulos son siempre positivos, el signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ coincide con el de $\cos \alpha$. Así, sin calcular el ángulo, el signo ya indica qué tipo de ángulo forman dos vectores no nulos:

Producto escalar	Ángulo α	Ejemplo con $\vec{u} = (2, 1)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$	Agudo: $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$	$\vec{v} = (1, 3): 2 + 3 = 5 > 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	Recto: $\alpha = 90^\circ$	$\vec{v} = (-1, 2): -2 + 2 = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$	Obtuso: $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$	$\vec{v} = (-3, 1): -6 + 1 = -5 < 0$

Tabla 1: El signo del producto escalar indica si el ángulo entre dos vectores es agudo, recto u obtuso.

La siguiente gráfica muestra cómo cambia el producto escalar de dos vectores de módulos fijos al ir abriendo el ángulo que forman: pasa de positivo a cero y de cero a negativo.

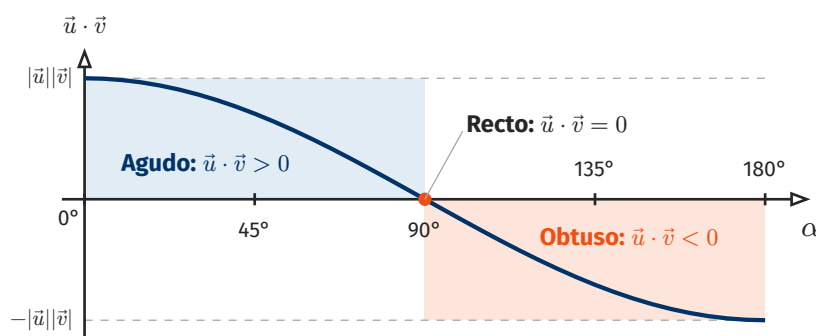


Figura 17: Para dos vectores de módulos fijos, $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$ varía con el ángulo: es máximo cuando tienen el mismo sentido ($\alpha = 0^\circ$), se anula cuando son perpendiculares ($\alpha = 90^\circ$) y es mínimo cuando tienen sentidos contrarios ($\alpha = 180^\circ$).

Combinando las expresiones anteriores se puede poner:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

Ejemplo: dados $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$, se tiene $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$, $|\vec{u}| = \sqrt{10}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, luego

$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

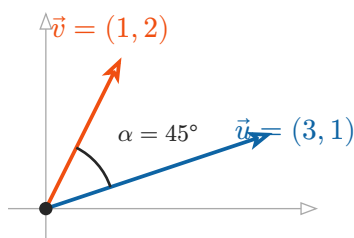


Figura 18: Ángulo entre $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (1, 2)$, calculado a partir de sus coordenadas: $\alpha = 45^\circ$.

El producto escalar de dos vectores tiene las siguientes propiedades:

1. El producto escalar de un vector por sí mismo es un número positivo o nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$$

siendo $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

2. Propiedad conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
3. Propiedad asociativa mixta: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v}$.
4. Propiedad distributiva respecto de la adición: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

También se puede definir el producto escalar como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = |\vec{v}| \cdot \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}$$

RECUERDA

El **coseno del ángulo** entre dos vectores se obtiene despejando de la expresión analítica del producto escalar:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x \cdot x' + y \cdot y'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

En particular, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ (siempre que ambos vectores sean no nulos).

1. AMPLIACIÓN: EXPRESIÓN ANALÍTICA EN UNA BASE CUALQUIERA

Ampliación: este apartado, planteado en el espacio, va más allá del programa oficial y su estudio es opcional. Basta con recordar que la fórmula $xx' + yy'$ solo es válida en bases ortonormales, como la canónica.

Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ una base cualquiera del espacio, y sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, los cuales se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base:

$$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$$

El producto escalar de ambos vectores será:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \cdot (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \\ &= xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + xy'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) + xz'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + yx'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) + \dots + zz'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) \end{aligned}$$

Es decir, aparecen los nueve productos $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$; en una base cualquiera ninguno de ellos tiene por qué anularse.

Usando la notación matricial se puede reescribir esta expresión de la siguiente forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Hay que hacer notar que la matriz

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

es simétrica, ya que el producto escalar es conmutativo.

La expresión anterior se puede simplificar si se escoge la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de manera adecuada. Así, si los vectores de la base son perpendiculares entre sí, los productos escalares $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ son nulos cuando $i \neq j$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) + yy'(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) + zz'(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) = xx' + yy' + zz'$$

Una base cuyos vectores son perpendiculares y de módulo igual a 1 recibe el nombre de *base ortonormal*¹. Un ejemplo de ello es la **base canónica**, formada por los vectores:

- $\vec{i} = (1, 0, 0)$
- $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- $\vec{k} = (0, 0, 1)$

Con lo que la expresión del producto escalar quedaría:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \cdot \vec{i} & \vec{i} \cdot \vec{j} & \vec{i} \cdot \vec{k} \\ \vec{j} \cdot \vec{i} & \vec{j} \cdot \vec{j} & \vec{j} \cdot \vec{k} \\ \vec{k} \cdot \vec{i} & \vec{k} \cdot \vec{j} & \vec{k} \cdot \vec{k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz' \end{aligned}$$

Expresión que recibe el nombre de **expresión analítica del producto escalar**. Solamente es válida esta expresión si los vectores están expresados en una base ortonormal.

VII. APLICACIONES

Los vectores y el producto escalar tienen numerosas aplicaciones en geometría, en física y en meteorología. A continuación se recogen las más habituales.

¹Una base es *ortonormal* si sus vectores son ortogonales dos a dos y de módulo unidad.

1. TRABAJO DE UNA FUERZA

Una de las aplicaciones físicas más importantes del producto escalar es el cálculo del **trabajo** realizado por una fuerza constante $\vec{F}$ que actúa sobre un cuerpo mientras este se desplaza según un vector $\vec{d}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha$$

Solo la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento realiza trabajo: si $\vec{F}$ y $\vec{d}$ son perpendiculares ($\alpha = 90^\circ$), el trabajo es nulo, aunque la fuerza tenga módulo grande.

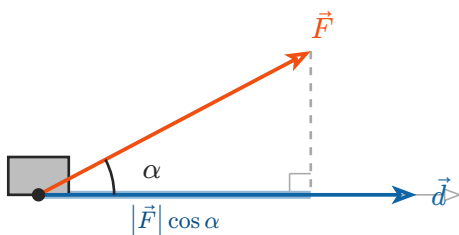


Figura 19: Trabajo de una fuerza: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$; solo la componente de $\vec{F}$ en la dirección de $\vec{d}$ contribuye al trabajo.

Ejemplo: una fuerza $\vec{F} = (3, 4)$ N desplaza un cuerpo según $\vec{d} = (5, 0)$ m. El trabajo es $W = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 15$ J. Como $|\vec{F}| = 5$ N y $|\vec{d}| = 5$ m, el ángulo entre ambos cumple $\cos \alpha = \frac{15}{5 \cdot 5} = 0.6$, es decir, $\alpha \approx 53.13^\circ$.

2. PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE OTRO

La proyección de $\vec{u}$ sobre la dirección de $\vec{v}$ mide cuánto «avanza» $\vec{u}$ en esa dirección:

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Si se quiere el **vector proyección**, se multiplica ese número por el vector unitario de $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Ejemplo: con $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 3)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 + 9 = 17$ y $|\vec{v}| = 5$, luego $\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{17}{5} = 3.4$ y el vector proyección es $\frac{17}{25} \cdot (4, 3) = (2.72, 2.04)$.

Así se calcula, por ejemplo, la componente del viento a lo largo de una pista de aterrizaje (viento de cara o de cola) y la componente perpendicular a ella (viento cruzado).

Ejemplo (viento en pista): un aeródromo tiene la pista 09/27, orientada este-oeste (los números indican el rumbo en decenas de grados: 090° y 270°). Se observa viento de 300° a 20 kt. Con el eje X hacia el este y el eje Y hacia el norte:

1. Vector viento (hacia donde sopla): $u = -20 \sin 300^\circ \approx 17.3$ kt y $v = -20 \cos 300^\circ = -10$ kt, es decir, $\vec{w} \approx (17.3, -10)$ kt.
2. Un avión que aterriza por la pista 27 lleva rumbo oeste; el vector unitario de su dirección es $\vec{e} = (-1, 0)$.
3. Componente a lo largo de la pista: $\vec{w} \cdot \vec{e} = 17.3 \cdot (-1) + (-10) \cdot 0 = -17.3$ kt. El signo negativo indica que el viento se opone al movimiento: es **viento de cara** de 17.3 kt.
4. Componente cruzada: el unitario perpendicular a la pista es $\vec{n} = (0, 1)$ y $\vec{w} \cdot \vec{n} = -10$ kt: **viento cruzado** de 10 kt, que sopla de norte a sur (entra por la derecha del avión).

Como comprobación, $\sqrt{17.3^2 + 10^2} \approx 20$ kt. En general, si φ es el ángulo entre la dirección del viento y la de la pista, el viento de cara vale $V \cos \varphi$ y el cruzado $V \sin \varphi$; aquí $\varphi = 300^\circ - 270^\circ = 30^\circ$, y se obtiene $20 \cos 30^\circ \approx 17.3$ kt y $20 \sin 30^\circ = 10$ kt. Si se aterrizase por la 09, esos 17.3 kt serían de **cola**; por eso se utiliza la pista 27.

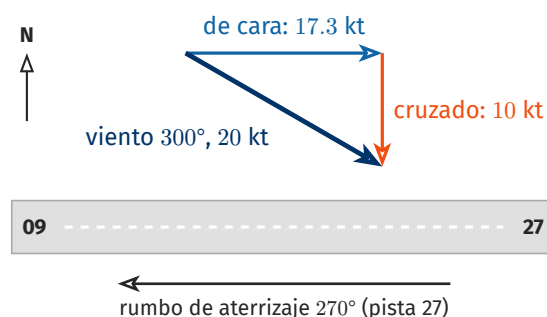


Figura 20: Viento de 300° y 20 kt sobre la pista 09/27: componente a lo largo de la pista (de cara para quien aterriza por la 27) y componente cruzada.

3. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS Y PUNTO MEDIO

La distancia entre $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

El **punto medio** M del segmento AB se obtiene promediando las coordenadas:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplo: para $A(1, 2)$ y $B(4, 6)$: $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$, $d(A, B) = \sqrt{9 + 16} = 5$ y $M = (2.5, 4)$. Estas fórmulas se retoman en el tema 3 (ecuaciones de la recta y distancias).

4. COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES: AVIÓN CON VIENTO CRUZADO

Cuando un cuerpo se mueve dentro de un medio que a su vez se desplaza, su velocidad respecto al suelo es la **suma vectorial** de ambas velocidades (regla del paralelogramo). Es el caso de un avión, un globo sonda o un barco.

Ejemplo: tomando el eje X hacia el este y el eje Y hacia el norte, un avión vuela con rumbo norte a 200 km/h respecto al aire, $\vec{v}_a = (0, 200)$, y sopla viento del oeste a 50 km/h, $\vec{v}_w = (50, 0)$. Su velocidad respecto al suelo es:

$$\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_w = (50, 200)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{50^2 + 200^2} = \sqrt{42500} \approx 206.2 \text{ km/h}$$

El avión se desvía de su rumbo un ángulo β hacia el este tal que $\tan \beta = \frac{50}{200} = 0.25$, es decir, $\beta \approx 14.04^\circ$.

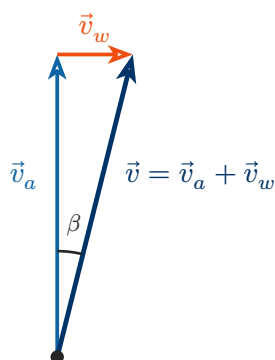


Figura 21: Velocidad de un avión respecto al suelo: suma de su velocidad respecto al aire y de la velocidad del viento.

5. EJERCICIOS RESUELTOS

- Perpendicularidad y paralelismo.** Halla k para que $\vec{u} = (k, 2)$ y $\vec{v} = (3, -6)$ sean (a) perpendiculares; (b) paralelos.

Solución: (a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3k - 12 = 0 \Rightarrow k = 4$. (b) $\frac{k}{3} = \frac{2}{-6} \Rightarrow k = -1$; en efecto, $(-1, 2) = -\frac{1}{3} \cdot (3, -6)$.

- Ángulo entre dos vectores.** Calcula el ángulo que forman $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (4, 3)$.

Solución: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 + 12 = 24$ y $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 5$, luego $\cos \alpha = \frac{24}{25} = 0.96$ y $\alpha \approx 16.26^\circ$.

- Componentes del viento.** Una estación registra viento del noroeste ($\delta = 315^\circ$) de 10 m/s. Calcula sus componentes u y v .

Solución: $u = -10 \sin 315^\circ \approx 7.07$ m/s y $v = -10 \cos 315^\circ \approx -7.07$ m/s. El viento sopla hacia el sureste: avanza hacia el este ($u > 0$) y hacia el sur ($v < 0$), y su módulo es $\sqrt{7.07^2 + 7.07^2} \approx 10$ m/s.

- Operaciones con vectores.** Dados $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, -3)$, calcula $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $3\vec{u} - 2\vec{v}$ y el vector unitario de este último.

Solución: $\vec{u} + \vec{v} = (0, -1)$ y $\vec{u} - \vec{v} = (2, 5)$. Además, $3\vec{u} = (3, 6)$ y $-2\vec{v} = (2, 6)$, luego $3\vec{u} - 2\vec{v} = (5, 12)$. Su módulo es $\sqrt{25 + 144} = 13$ y su vector unitario, $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

5. **Vector unitario y vector de módulo dado.** Dados $A(-1, 3)$ y $B(5, -5)$, halla el vector unitario de $\overrightarrow{AB}$ y un vector de módulo 15 con la misma dirección y sentido contrario.

Solución: $\overrightarrow{AB} = (6, -8)$ y $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 64} = 10$, luego su unitario es $(0.6, -0.8)$. El vector pedido es $-15 \cdot (0.6, -0.8) = (-9, 12)$; en efecto, $\sqrt{81 + 144} = 15$.

6. **Triángulo rectángulo.** Comprueba que el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(0, 4)$ es rectángulo y calcula su ángulo en B .

Solución: $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 3)$, con $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 + 3 = 0$: el ángulo en A es recto. En B : $\overrightarrow{BA} = (-3, -1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-4, 2)$, luego $\cos \hat{B} = \frac{12-2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\hat{B} = 45^\circ$. Como $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}$, el triángulo es rectángulo e isósceles.

7. **Viento medio y cizalladura (meteorología).** Un radiosondeo mide viento de 270° a 20 kt en el nivel de 850 hPa y viento de 180° a 30 kt en el de 700 hPa. Calcula (a) el viento medio de la capa y (b) la cizalladura vertical del viento, es decir, el vector diferencia entre el viento del nivel superior y el del inferior.

Solución: con $u = -V \sin \delta$ y $v = -V \cos \delta$ se obtiene $\vec{w}_1 = (20, 0)$ kt y $\vec{w}_2 = (0, 30)$ kt.

(a) Viento medio: $\vec{w}_m = \frac{\vec{w}_1 + \vec{w}_2}{2} = (10, 15)$ kt, de módulo $\sqrt{100 + 225} = \sqrt{325} \approx 18$ kt. Sopla hacia el noreste; su dirección de procedencia cumple $\tan(\delta - 180^\circ) = \frac{10}{15}$, luego $\delta \approx 180^\circ + 33.7^\circ \approx 214^\circ$: viento medio de 214° y unos 18 kt.

(b) Cizalladura: $\vec{w}_2 - \vec{w}_1 = (-20, 30)$ kt, de módulo $\sqrt{400 + 900} = \sqrt{1300} \approx 36$ kt. Una variación tan intensa del viento en apenas unos 1500 m de altura es relevante para la aviación y para la organización de las tormentas.

8. **Deriva de un globo sonda (meteorología).** Un globo sonda asciende a 5 m/s. Entre la superficie y 3000 m sopla viento del oeste (270°) a 15 m/s, y entre 3000 y 6000 m, viento del sur (180°) a 20 m/s. Calcula a qué distancia horizontal de la estación y en qué dirección se encuentra el globo al alcanzar los 6000 m, y el viento medio de toda la capa.

Solución: cada capa de 3000 m se atraviesa en $\frac{3000}{5} = 600$ s. En la primera, el viento $(15, 0)$ m/s desplaza el globo $\vec{d}_1 = 600 \cdot (15, 0) = (9000, 0)$ m = $(9, 0)$ km; en la segunda, el viento $(0, 20)$ m/s lo desplaza $\vec{d}_2 = 600 \cdot (0, 20) = (0, 12)$ km. El desplazamiento total es la suma:

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (9, 12) \text{ km}, \quad |\vec{d}| = \sqrt{81 + 144} = 15 \text{ km}$$

Su rumbo θ medido desde el norte cumple $\tan \theta = \frac{9}{12} = 0.75$, es decir, $\theta \approx 36.9^\circ$: el globo está a 15 km de la estación, hacia el noreste. El viento medio de la capa es el desplazamiento dividido entre el tiempo total (1200 s): $\frac{9000, 12000}{1200} = (7.5, 10)$ m/s, de módulo 12.5 m/s. Es menor que la media de los módulos (17.5 m/s) porque, al sumar vectores de direcciones distintas, se compensan en parte.



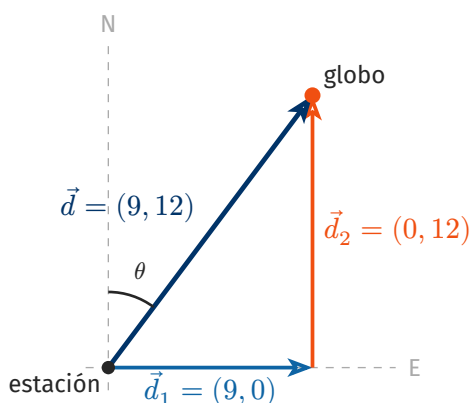


Figura 22: Deriva de un globo sonda: su desplazamiento horizontal total (en km) es la suma de los desplazamientos que le produce el viento en cada capa.

9. **Viento real medido desde un barco (meteorología).** Un buque de observación navega con rumbo norte a 12 kt. Su anemómetro registra un viento aparente (relativo al barco) de 323° y 15 kt. Calcula el viento real.

Solución: el viento aparente es el viento real menos la velocidad del barco, $\vec{a} = \vec{w} - \vec{v}_b$, luego $\vec{w} = \vec{a} + \vec{v}_b$. En componentes, $\vec{a} = (-15 \sin 323^\circ, -15 \cos 323^\circ) \approx (9, -12)$ kt y $\vec{v}_b = (0, 12)$ kt, así que:

$$\vec{w} \approx (9, -12) + (0, 12) = (9, 0) \text{ kt}$$

El viento real es del oeste (270°) y de 9 kt. El avance del barco hace que el anemómetro registre un viento más intenso y girado hacia la proa; por eso las observaciones tomadas a bordo deben corregirse siempre con la velocidad del buque.

VIII. AMPLIACIÓN: PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Ampliación: el producto vectorial solo está definido para vectores del espacio y no forma parte del programa oficial. Se incluye como apoyo para Física (momento de una fuerza, fuerza magnética sobre cargas móviles del tema 16); su estudio es opcional.

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que tiene las siguientes propiedades:

1. Su módulo es: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$
2. Su dirección es perpendicular al plano formado por dichos vectores.
3. Su sentido es el de avance de un sacacorchos que gira del primer vector al segundo por el camino más corto.

4.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Esta expresión recibe el nombre de **expresión analítica** del producto vectorial.

5. Si $\vec{u} = \vec{0}$ o bien $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
6. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (es decir, son linealmente dependientes), entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.
7. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$
8. $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$
9. $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

Estas tres últimas igualdades se deducen directamente recordando que los tres vectores de la base son perpendiculares y $\sin 90^\circ = 1$, y además son vectores unitarios. Por otro lado, es fácil obtenerlas a partir de la expresión analítica del producto vectorial.

RECUERDA

El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es **otro vector**, no un escalar:

- Su **módulo** coincide con el área del paralelogramo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes (paralelos), siempre que ambos sean no nulos.
- **No** es conmutativo ($\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$) ni asociativo.

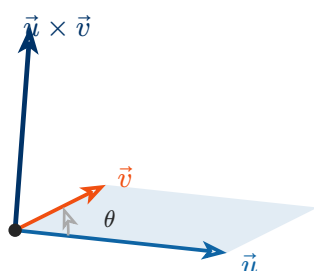
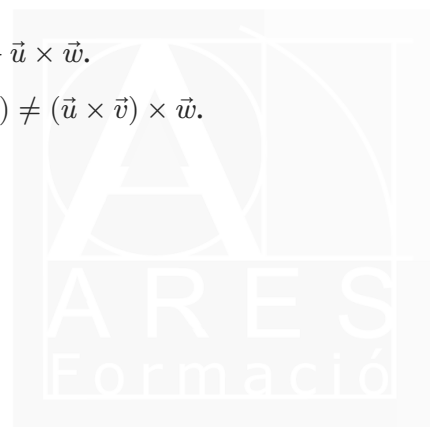


Figura 23: $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$; su módulo es $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$ y su sentido, el de avance del sacacorchos al girar de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

1. Propiedad anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.
2. Propiedad asociativa respecto de la multiplicación por un escalar: $k(\vec{u} \times \vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (k\vec{v})$.
3. Propiedad distributiva respecto de la adición: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
4. El producto vectorial **no** cumple la propiedad asociativa: $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.



IX. RESUMEN

Aunque ambos productos parten de los mismos dos vectores, el resultado que producen es de naturaleza completamente distinta: el producto escalar da lugar a un **número**, mientras que el producto vectorial (de ampliación) da lugar a **otro vector**.

RECUERDA

- **Producto escalar** $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$: un **número**; nulo $\Leftrightarrow$ los vectores son perpendiculares.
- **Producto vectorial** (ampliación) $\vec{u} \times \vec{v}$: **otro vector** perpendicular al plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, de módulo $|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$; nulo $\Leftrightarrow$ los vectores son paralelos (linealmente dependientes).

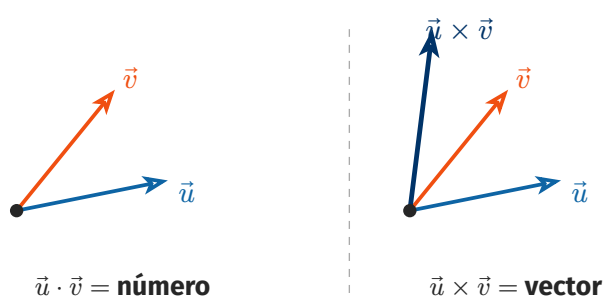


Figura 24: Comparación: el producto escalar (izquierda) produce un número, mientras que el producto vectorial (derecha) produce un vector perpendicular al plano de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

El siguiente esquema reúne las operaciones estudiadas en el tema y cómo se relacionan entre sí. Resulta útil como repaso rápido antes del examen.

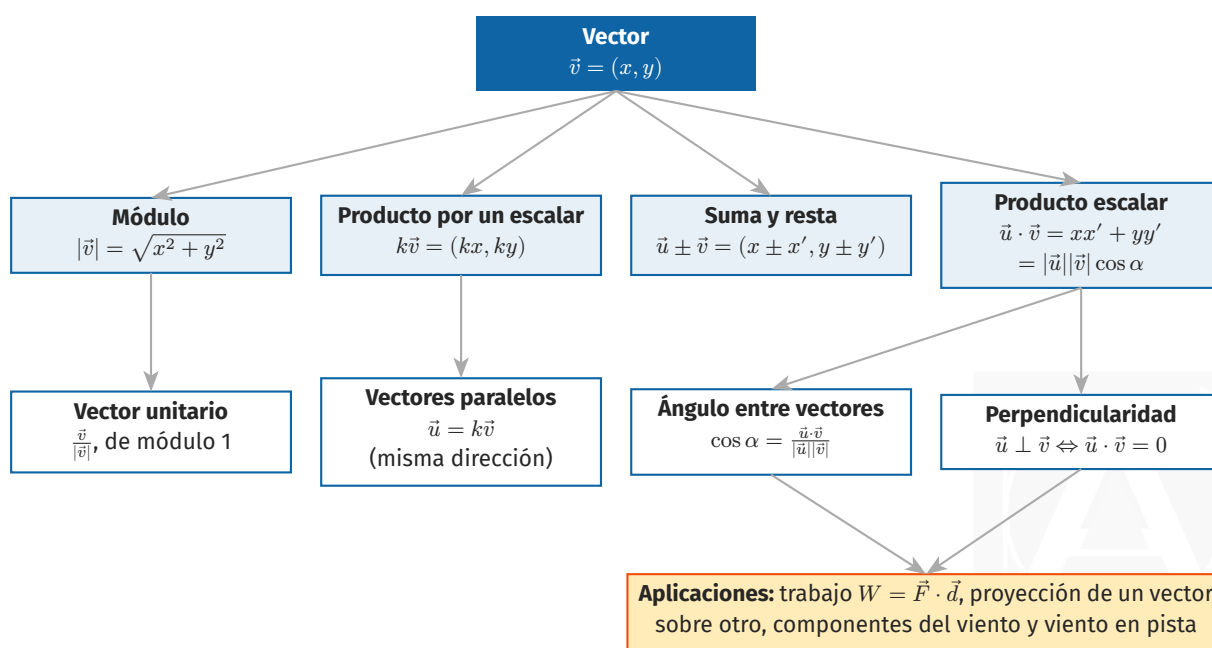


Figura 25: Esquema resumen de las operaciones con vectores en el plano y de sus principales consecuencias y aplicaciones.

X. AUTOEVALUACIÓN

Responde a las siguientes preguntas eligiendo una sola opción. Las soluciones, con una breve explicación, están al final del tema.

- El módulo del vector $\vec{v} = (-6, 8)$ es:
 - 2
 - 10
 - 14
 - 100
- El vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{v} = (3, -4)$ es:
 - $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$
 - $(\frac{3}{7}, -\frac{4}{7})$
 - $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$
 - $(1, -1)$
- Dados los puntos $A(2, -1)$ y $B(5, 3)$, el vector $\overrightarrow{AB}$ es:
 - $(-3, -4)$
 - $(3, 4)$
 - $(7, 2)$
 - $(3, 2)$
- Si $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (-3, 4)$, el vector $2\vec{u} - \vec{v}$ es:
 - $(7, -6)$
 - $(1, 2)$
 - $(7, 2)$
 - $(-1, -6)$
- Si $|\vec{v}| = 4$, el vector $-3\vec{v}$ tiene:
 - módulo -12
 - módulo 12 y el mismo sentido que $\vec{v}$
 - módulo 12 y sentido contrario a $\vec{v}$
 - módulo $\frac{4}{3}$
- ¿Cuál de estos pares de vectores es linealmente dependiente?
 - $(1, 2)$ y $(2, 1)$
 - $(2, -3)$ y $(-4, 6)$
 - $(1, 0)$ y $(0, 1)$
 - $(3, 1)$ y $(1, 3)$
- Las coordenadas de $\vec{w} = (5, 1)$ en la base $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, con $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (1, -1)$, son:
 - $(3, 2)$
 - $(2, 3)$
 - $(5, 1)$
 - $(4, 1)$
- El producto escalar de $\vec{u} = (3, -2)$ y $\vec{v} = (4, 5)$ es:
 - 2
 - 22
 - $(12, -10)$
 - 2
- Si el producto escalar de dos vectores no nulos es negativo, el ángulo que forman es:
 - agudo
 - recto
 - obtuso
 - nulo
- El valor de k para que $\vec{u} = (k, 3)$ y $\vec{v} = (2, -4)$ sean perpendiculares es:
 - 6
 - 6
 - $\frac{3}{2}$
 - $-\frac{3}{2}$
- Si $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y forman un ángulo de 60° , entonces $\vec{u} \cdot \vec{v}$ vale:
 - 3
 - 6
 - $3\sqrt{3}$
 - 0
- Una fuerza $\vec{F} = (3, 4)$ N desplaza un cuerpo según $\vec{d} = (5, 0)$ m. El trabajo realizado es:
 - 15 J
 - 25 J
 - 35 J
 - 20 J

13. La proyección de $\vec{u} = (2, 4)$ sobre la dirección de $\vec{v} = (3, 4)$ vale:
- a) 22 b) 4.4 c) 5 d) 4.47
14. En una pista orientada a 090° sopla viento de 360° a 20 kt. Entonces hay:
- a) 20 kt de viento de cara b) 20 kt de viento cruzado
c) 10 kt de cara y 10 kt cruzado d) ninguna componente de viento
15. Una estación registra viento del oeste ($\delta = 270^\circ$) de 10 m/s. Sus componentes (u, v) son:
- a) (10, 0) b) (-10, 0) c) (0, 10) d) (0, -10)

1. SOLUCIONES

Pregunta	Respuesta	Explicación
1	b	$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.
2	a	$ \vec{v} = \sqrt{9 + 16} = 5$; se divide cada componente entre 5.
3	b	Extremo menos origen: $(5 - 2, 3 - (-1)) = (3, 4)$.
4	a	$2\vec{u} = (4, -2)$ y $(4, -2) - (-3, 4) = (7, -6)$.
5	c	El módulo es $ -3 \cdot 4 = 12$ (nunca negativo); el signo menos invierte el sentido.
6	b	$(-4, 6) = -2 \cdot (2, -3)$; su determinante es $2 \cdot 6 - (-3)(-4) = 0$.
7	a	$3(1, 1) + 2(1, -1) = (5, 1)$.
8	a	$3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 12 - 10 = 2$; el resultado es un número, no un vector.
9	c	El signo de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ es el de $\cos \alpha$, negativo entre 90° y 180° .
10	b	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2k - 12 = 0 \Rightarrow k = 6$.
11	a	$2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot 0.5 = 3$.
12	a	$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 15 \text{ J}$.
13	b	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 16 = 22$ y $ \vec{v} = 5$, luego $\frac{22}{5} = 4.4$.
14	b	El viento forma 90° con la pista: de cara $20 \cos 90^\circ = 0$ kt; cruzado $20 \sin 90^\circ = 20$ kt.
15	a	$u = -10 \sin 270^\circ = 10$ y $v = -10 \cos 270^\circ = 0$: el viento del oeste sopla hacia el este.

Tabla 2: Soluciones de la autoevaluación.





Bibliografía recomendada

- George B. Thomas, Jr. (2010). **Cálculo. Varias variables** (12.ª ed., Vol. 2). Pearson Educación.

© 2026 Academia Aresformación. Todos los derechos reservados.

Esta obra y todo su contenido (textos, gráficos, esquemas y maquetación) están protegidos por el Real Decreto Legislativo 1/1996 (Ley de Propiedad Intelectual) y por la normativa nacional e internacional aplicable.

Se concede al alumno una **licencia de uso personal, intransferible y no exclusiva**, limitada a su estudio individual. Queda expresamente prohibido, sin autorización escrita del titular:

- Reproducir, copiar o imprimir la obra, total o parcialmente, para terceros.
- Distribuir, vender, revender, alquilar, prestar o ceder este documento por cualquier medio, gratuito u oneroso.
- Comunicarlo públicamente o ponerlo a disposición en internet, redes sociales, plataformas de intercambio o cualquier repositorio digital.
- Eliminar o alterar las marcas de agua, avisos de copyright o identificadores incorporados.

La infracción de estos derechos generará responsabilidad civil (indemnización de daños y perjuicios, arts. 138 y ss. TRLPI) y puede constituir delito castigado con pena de prisión de hasta 4 años y multa (art. 270 del Código Penal).

Este ejemplar está identificado de forma individualizada. Su difusión no autorizada permite trazar al usuario de origen.

Contacto para autorizaciones y licencias: info@academiares.com